**Jan Reineke**
**Andreas Abel**

## Simple Sign Analysis

1. Abstract operators for addition, subtraction, multiplication and division:

| $+^{\#}$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $<0$ | $\bot$ | $<0$ | $<0$ | $\top$ | $\top$ |
| $0$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $\top$ | $>0$ | $>0$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $-^{\#}$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $<0$ | $\bot$ | $\top$ | $<0$ | $<0$ | $\top$ |
| $0$ | $\bot$ | $>0$ | $0$ | $<0$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $>0$ | $>0$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $*^{\#}$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $<0$ | $\bot$ | $>0$ | $0$ | $<0$ | $\top$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $>0$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $0$ | $\top$ | $\top$ |

| $/^{\#}$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $<0$ | $\bot$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ |
| $>0$ | $\bot$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |

2. Abstract operators for $<$ and $=$:

| $<^{\#}$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $<0$ | $\bot$ | $\top$ | $1$ | $1$ | $\top$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $=^{\#}$ | $\bot$ | $<0$ | $0$ | $>0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $<0$ | $\bot$ | $\top$ | $0$ | $0$ | $\top$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

## Extended Sign Analysis

1. Abstract operators for addition, subtraction, multiplication and division:

| $+^{\#}$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
| $<0$ | $\bot$ | $<0$ | $<0$ | $<0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\leq0$ | $\bot$ | $\leq0$ | $<0$ | $\leq0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $>0$ | $\top$ | $\top$ | $>0$ | $>0$ | $\top$ |
| $\geq0$ | $\bot$ | $\geq0$ | $\top$ | $\top$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $-^{\#}$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $>0$ | $\geq0$ | $<0$ | $\leq0$ | $\top$ |
| $<0$ | $\bot$ | $<0$ | $\top$ | $\top$ | $<0$ | $<0$ | $\top$ |
| $\leq0$ | $\bot$ | $\leq0$ | $\top$ | $\top$ | $<0$ | $\leq0$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $>0$ | $>0$ | $>0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\geq0$ | $\bot$ | $\geq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $*^{\#}$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $<0$ | $\bot$ | $0$ | $>0$ | $\geq0$ | $<0$ | $\leq0$ | $\top$ |
| $\leq0$ | $\bot$ | $0$ | $\geq0$ | $\geq0$ | $\leq0$ | $\leq0$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
| $\geq0$ | $\bot$ | $0$ | $\leq0$ | $\leq0$ | $\geq0$ | $\geq0$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $/^{\#}$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $0$ | $\bot$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $<0$ | $\bot$ | $\bot$ | $\geq0$ | $\geq0$ | $\leq0$ | $\leq0$ | $\top$ |
| $\leq0$ | $\bot$ | $\bot$ | $\geq0$ | $\geq0$ | $\leq0$ | $\leq0$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $\bot$ | $\leq0$ | $\leq0$ | $\geq0$ | $\geq0$ | $\top$ |
| $\geq0$ | $\bot$ | $\bot$ | $\leq0$ | $\leq0$ | $\geq0$ | $\geq0$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

2. Abstract operators for $<$ and $=$:

| $<^{\#}$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\top$ | $\top$ |
| $<0$ | $\bot$ | $1$ | $\top$ | $\top$ | $1$ | $1$ | $\top$ |
| $\leq0$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $1$ | $\top$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\geq0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

| $=^{\#}$ | $\bot$ | $0$ | $<0$ | $\leq0$ | $>0$ | $\geq0$ | $\top$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $0$ | $\bot$ | $1$ | $0$ | $\top$ | $0$ | $\top$ | $\top$ |
| $<0$ | $\bot$ | $0$ | $\top$ | $\top$ | $0$ | $0$ | $\top$ |
| $\leq0$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $0$ | $\top$ | $\top$ |
| $>0$ | $\bot$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\geq0$ | $\bot$ | $\top$ | $0$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |